

# РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПОЛОВ С УЧЕТОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НАГРУЗОК ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУЗОПОДЪЕМНОГО ТРАНСПОРТА

Интенсивное перемещение подъемно-транспортного оборудования является характерным для большинства современных объектов производственно-складского назначения. При этом данные воздействия часто являются определяющими при назначении конструкций несущих плит промышленных полов. Автором статьи были проведены теоретические исследования с использованием решения динамической задачи теории упругости, в результате которых были получены соответствующие решения, коэффициенты и формулы, а также обоснована необходимость учета данных воздействий при проектировании полов.

Особенность решения динамической задачи в отличие от статической – это необходимость учета сил инерции, являющихся функциями массы рассматриваемой (рассчитываемой) плиты, и ее ускорений при воздействии многократно повторяющихся подвижных (динамических) нагрузок с учетом наличия подстилающего (упругого) основания. При динамическом расчете расчетная модель назначается с учетом необходимой точности решения, которая соответствует системе уравнений с бесконечным числом степеней свободы и приводит к необходимости интегрирования неоднородного дифференциального уравнения в частных производных, так как перемещения точек плиты являются функциями координат и времени:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x, y) = g(x, y, t) \quad (1)$$

где:  
 D – цилиндрическая жесткость плиты;  
 w – прогиб плиты;  
 x, y – координаты срединной плоскости плиты;  
 m – масса плиты;  
 $m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  – силы инерции плиты;  
 p(x, y) – реактивный отпор основания;  
 g(x, y, t) – действующая нагрузка.

Рассмотрим решение уравнения (1) для случая движения нагрузки, распределенной по площади малого (по сравнению с размерами плиты) прямоугольника, по плите неограниченных размеров. В дальнейшем для упрощения в качестве расчетной модели примем Винклеровскую одноконстантную модель основания (модель местных

упругих деформаций). При этом использование других моделей, например упругого полупространства, возможно путем замены значения коэффициента постели на эквивалентный модуль упругости грунта при упругой характеристике гибкости плиты.

Определение усилий в рассматриваемой плите при действии нескольких нагрузок может быть произведено с помощью принципа суперпозиции. Введем вместо неподвижных координат x и y (в случае рассмотрения статических нагрузок) подвижные координаты  $\xi$  и  $\eta$ , движущиеся вместе с нагрузкой с постоянной скоростью v (рис. 1). Тогда получим:

$$\xi = x - vt; \quad \eta = y - vt \quad (2)$$



**Горб Александр Михайлович**  
**ЗАО «СК Конкрит Инжиниринг».**  
**Директор.**

где:  
 $-v_x, v_y$  – проекции скорости на оси координат x и y;  
 $-t$  – время.

Произведя замену переменных x и y в уравнении (1) на  $\xi$  и  $\eta$ , получим:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) + m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} v_x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} v_x v_y + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} v_y^2 + cw \right) = p(\xi; \eta) \quad (3)$$

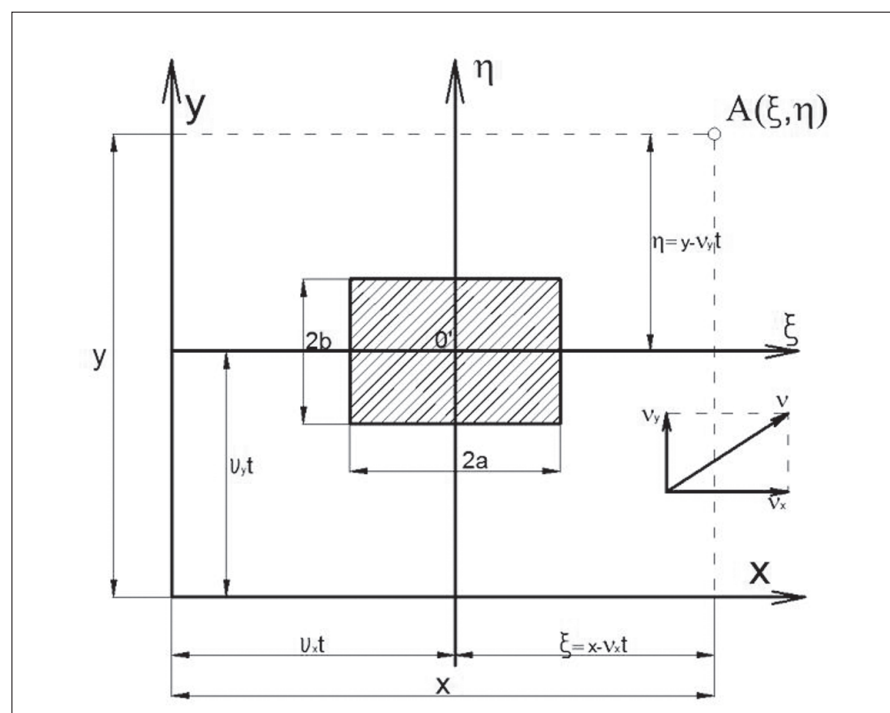


Рис. 1. Расчетная схема для определения динамического воздействия подвижной нагрузки

Согласно этому методу известно, что если  $\varphi(x, y)$  и ее частные производные есть непрерывные функции, равные нулю в бесконечности, то в этом случае для трансформанта Фурье:

$$E_{\varphi(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (4)$$

существует обратное преобразование:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\varphi(\alpha, \beta)} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (5)$$

Уравнение (3) умножаем на  $\frac{1}{2\pi} e^{i(\alpha x + \beta y)}$

и, интегрируя по всей плоскости, получаем:

$$D(\alpha^2 + \beta^2) E_{(\alpha, \beta)} - m(v_x \alpha + v_y \beta)^2 E_{(\alpha, \beta)} + c E_{(\alpha, \beta)} = E_{p(\alpha, \beta)} \quad (6)$$

Откуда:

$$E_{(\alpha, \beta)} = \frac{E_p(\alpha, \beta)}{c - m(v_x \alpha + v_y \beta)^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta \quad (7)$$

Используя выражение (5), получаем:

$$w_{\xi, \eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{p(\alpha, \beta)} e^{-i(\alpha \xi + \beta \eta)}}{c - m(v_x \alpha + v_y \beta)^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta \quad (8)$$

Если принять, что  $v_x = 0$ , нормальный режим движения транспортного средства ( $-v_x = v$ ), а  $p(\xi; \eta)$ , соответствующий нагрузке, равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами  $2a$  и  $2b$ , с интенсивностью  $q$ , то после ряда преобразований получим выражения для прогибов плиты и изгибающих моментов:

$$w_{(\xi, \eta)} = \frac{4q}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha \xi \cos \beta \eta \sin \alpha a \sin \beta b d\alpha d\beta}{\alpha \beta [c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2]} \quad (9)$$

$$M_{\xi} = \frac{4qD}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{\alpha \beta [c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2]}$$

$$M_{\eta} = \frac{4qD}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\mu \alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{\alpha \beta [c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2]}$$

С целью получения решения для движущейся сосредоточенной силы  $P$  необходимо принять условия  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$ ,  $4abq = P$ .

После соответствующих преобразований получим:

$$w_{(\xi, \eta)} = \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

$$M_{\xi} = \frac{PD}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha^2 + \mu \beta^2) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

$$M_{\eta} = \frac{PD}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\mu \alpha^2 + \beta^2) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad (10)$$

На основании полученных выражений можно вычислить динамические коэффициенты как отношение моментов или прогибов плиты пола при динамической и статической нагрузках (статические моменты и прогибы вычисляются по формулам (9), (10) при условии, что  $v = 0$ ).

Для многих практических задач можно удовлетвориться приближенным решением, рассматривая плиту как систему с несколькими степенями свободы. Наиболее простой моделью для приближенного решения динамической задачи будет система с одной степенью свободы, которая дает приемлемую точность.

Дифференциальное уравнение движения для системы с одной степенью свободы имеет вид:

$$M_{II} \frac{d^2 w}{dt^2} + k\Phi \frac{dw}{dt} + kw = P(t) \quad (11)$$

где:

- $M_{II}$  – приведенная масса плиты;
- $w$  – прогиб плиты;
- $k$  – коэффициент жесткости плиты;
- $\Phi$  – модуль затухания;
- $P(t)$  – подвижная нагрузка.

Приведенную массу плиты с присоединенной массой грунта определим из условия, что кинетическая энергия системы, состоящей из плиты с присоединенной массой основания, равняется кинетической энергии сосредоточенной массы, расположенной в заданной точке.

Примем условие, что при колебаниях сохраняется одна и та же форма упругой поверхности плиты. Уравнение поверхности выразим так:

$$w_{(x, y)} = w_{\max} \varphi_{(x, y)} \sin p(t - \alpha) \quad (12)$$

где:

- $w_{(x, y)}$  – прогиб в произвольной точке с координатами  $x$  и  $y$ ;
- $w_{\max}$  – максимальный прогиб;
- $\alpha$  – угол, определяемый начальными условиями.

Условие равенства кинетической энергии плиты с присоединенной массой основания и кинетической энергии сосредоточенной массы запишем следующим образом:

$$U_{II} + U_{осн} = U_{II} \quad (13)$$

где:

- $U_{II}$  – кинетическая энергия плиты с распределенной массой;
- $U_{осн}$  – кинетическая энергия присое-

диненного грунтового основания;

$U_{II}$  – кинетическая энергия приведенной сосредоточенной массы.

Выражения для определения  $U_{II}$ ,  $U_{осн}$ ,  $U_{II}$  имеют вид:

$$U_{II} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \lambda_n h (w')^2 dx dy$$

$$U_{осн} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \int_0^l \lambda_r h (w' \frac{z}{h_0})^2 dx dy dz$$

$$U_{II} = \frac{1}{2} M_{II} (w')^2 \quad (14)$$

где:

$l$  – длина плиты (для бесконечных плит – диаметр чаши прогиба или удвоенное значение упругой характеристики плиты);

$\lambda_n$  – масса плиты, отнесенная к единице объема;

$\lambda_r$  – масса единицы объема грунтового основания;

$h$  – толщина плиты;

$h_0$  – глубина деформируемого слоя;

$z$  – ордината точки, расположенной на произвольной глубине.

Подставляя выражение (14) в равенство (13), для упрощения заменяя прямоугольные координаты полярными и производя необходимые преобразования, получаем:

$$M_{II} = 4\lambda_n h \int_0^{\pi/2} \int_0^R [2f_0(\xi)]^2 r dr d\varphi + \frac{4\lambda_0}{h_0^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \int_0^{h_0} [2f_0(\xi)]^2 z^2 dz dr d\varphi \quad (15)$$

Обозначим  $R = 3,8$ ,  $l = \sqrt[4]{\frac{D}{c}}$  и через

$f_0(\xi)$  – функцию Бесселя окончательно получим:

$$M_{II} = 3,76 l^2 \left( \lambda_n h + \frac{1}{3} \lambda_0 h_0 \right) \quad (16)$$

Коэффициент жесткости плиты  $k$  выражает усилие, необходимое для создания единичного перемещения. Он может быть выражен величиной, обратной прогибу плиты:

$$k = 2,4 \sqrt{c E_0 h^3} \quad (17)$$

где:

$c$  – коэффициент постели грунта;

$E_0$  – модуль упругости бетона;

$h$  – толщина плиты.

Модуль затухания  $\Phi$  характеризует влияние неупругих сопротивлений грунта и определяется опытным путем (значение  $\Phi$  меняется от 0,003 до 0,010, в

зависимости от вида грунтов). Чтобы определить нагрузку  $P(t)$ , переменную во времени, воспользуемся методом приведенных сил. Для этого быстро перемещающуюся по плите нагрузку заменим одной неподвижной силой в центре приведения, но меняющей свое значение во времени. Закон изменения приведенной силы во времени определим из условия, что статическое перемещение центра приведения в любое мгновение от любой силы при ее фактическом для данного мгновения положении на плите равняется перемещению такого же центра от приведенной силы с соответственно подобранным значением. Принимая значение прогиба центра плиты при любом расположении нагрузки в виде одной полуволны-синусоиды, получим:

$$P(t) = P \sin mt$$

$$m = \pi v / l \quad (18)$$

где:

$m$  – частота вынужденных колебаний плиты заданной жесткости;

$v$  – скорость перемещения нагрузки;

$l$  – то же, что и в формуле (14).

При расчетах конструкций плит учитывают максимальные значения прогибов и усилий, то есть начало колебательного процесса, а не его конец.

Поэтому при выполнении практических расчетов влияние неупругих сопротивлений грунта можно не учитывать.

С учетом такого допущения интеграл дифференциального уравнения (11) может быть определен следующими формулами:

при  $mt_1 < \pi$  (нагрузка движется по плите)

$$w = w_{cm}^{\max} \frac{P}{p^2 - m^2} (p \sin mt - m \sin pt) \quad (19)$$

при  $mt_1 > \pi$  (нагрузка сошла с плиты):

$$w = w_{cm}^{\max} \frac{P}{p^2 - m^2} \{ [p \sin mt - m \sin pt] + [p \sin m(t - t_1) - m \sin p(t - t_1)] \} \quad (20)$$

где:

$p = \sqrt{\frac{k}{M_{II}}}$  – частота собственных колебаний плиты;

$w_{cm}^{\max} = \frac{P}{p^2 M_{II}}$  – прогиб плиты при статической нагрузке  $P$ .

По формулам (19) и (20) можно определить коэффициент динамичности как отношение прогибов покрытий при динамической и статической нагрузках. Формулы для коэффициентов динамичности в зависимости от  $\beta = p/m$ , т. е. от соотношения частот

собственных  $p$  и вынужденных  $m$  колебаний, а также характера колебаний плиты, будут следующие:

свободные колебания  $\beta < 1$ :

$$k_d = \frac{2\beta}{1 - \beta^2} \cos \frac{\beta\pi}{2}$$

вынужденные колебания  $\beta = 1$ :

$$k_d = \pi/2$$

вынужденные колебания  $\beta = 1:3$ :

$$k_d = \frac{\beta}{\beta - 1} \sin \frac{2\pi}{\beta + 1}$$

вынужденные колебания  $\beta > 3$ :

$$k_d = \frac{\beta}{\beta - 1} \quad (21)$$

Для практических расчетов с достаточной точностью можно применять решения для системы и с одной степенью свободы. Суммарное воздействие подвижной нагрузки будет определяться расчетным коэффициентом динамичности.

Таблица 1. Коэффициент напряжения и допустимое количество циклов нагрузки (кривая усталости PSA) (по данным EB109.01P, Ассоциация портландцемента, Скоки, штат Иллинойс, 1984)

Коэффициент напряжения	Допустимое количество циклов нагрузки	Коэффициент напряжения	Допустимое количество циклов нагрузки
<0.45	неограниченно	0.73	832
0.45	62.790.761	0.74	630
0.46	14.335.236	0.75	477
0.47	5.202.474	0.76	361
0.48	2.402.754	0.77	274
0.49	1,286.914	0.78	207
0.50	762,043	0.79	157
0.51	485.184	0.80	119
0.52	326,334	0.81	90
0.53	229.127	0.82	68
0.54	166.533	0.83	52
0.55	124.523	0.84	39
0.56	94.065	0.85	30
0.57	71.229	0.86	22
0.58	53.937	0.87	17
0.59	40.842	0.88	13
0.60	30.927	0.89	10
0.61	23.419	0.90	7
0.62	17.733	0.91	6
0.63	13.428	0.92	4
0.64	10.168	0.93	3
0.65	7700	0.94	2
0.66	5830	0.95	2
0.67	4415	0.96	1
0.68	3343	0.97	1
0.69	2532	0.98	1
0.70	1917	0.99	1
0.71	1452	1.00	0
0.72	1099	>1.00	0

Определение расчетных значений динамических нагрузок при определении изгибающих моментов производится по следующей формуле:

$$P_{дин} = P_{ст} \cdot k_d \quad (22)$$

где:

$P_{дин}$  – динамическая нагрузка на плиту при движении транспортного средства;

$P_{ст}$  – статическая нагрузка от транспортного средства;

$k_d$  – расчетный коэффициент динамичности.

Для получения прогибов и изгибающих моментов с учетом формулы (22) рассматриваются колебания плиты под воздействием динамической нагрузки, определенной по формуле (21).

Опытные данные показывают, что при кратковременном воздействии нагрузки коэффициент постели грунта возрастает. Учет замедленно развивающихся вязких деформаций грунтового основания имеет большое значение при расчете плит полов. Благодаря упруговязким свойствам грунтовых ос-



нований деформации плит развиваются замедленно, поэтому при движении подъемно-транспортного оборудования по ровным поверхностям динамический коэффициент близок к единице. При движении по неровной поверхности динамические коэффициенты возрастают и достигают наибольшего значения при движении подъемно-транспортных средств со скоростью 30–50 км/ч. Исследования показали, что при современных технологиях строительства полов их ровность является удовлетворительной. Установлено однако, что в этих случаях отношение динамических нагрузок к статическим изменяется от 1,2 до 1,6.

При движении нагрузки по ровной поверхности расчетные значения коэффициентов динамичности зависят в том числе от материала обода колес транспортных средств:

$K_d=1,2$  – для пневматических шин;  
 $K_d=1,4$  – для стандартных литых резиновых колес и колес с ободом;  
 $K_d=1,6$  – для полиуретановых колес.

Автомобильное движение по полам промышленных помещений в основном включает в себя перемещение погрузчиков и грузовых автомобилей различной грузоподъемности. Груз и основной вес транспортных средств сосредоточены на колесах нагруженной оси. Параметры транспортных средств, влияющие на выбор толщин при проектировании плит полов на грунтовом основании, следующие:

- максимальная осевая нагрузка;
- расстояние между нагруженными осями и колесами;
- площадь контакта колес и плиты;
- повторяемость нагрузки в течение срока эксплуатации.

Осевая нагрузка, расстояния между осями и колесами на осях, а также

площадь контакта колеса (равновеликого отпечатка) с поверхностью плиты являются основными расчетными параметрами автотранспортного средства.

Количество циклов (повторяемость) нагружения может применяться для определения запаса прочности по материалу. Зная величину и повторность нагружения, можно количественно измерить усталость материала плиты (бетона, железобетона или сталефибробетона). Часто плита пола проектируется на неограниченное количество циклов нагружения.

Площадь контакта колеса движущегося транспортного средства и плиты пола используется для расчета несущей конструкции плиты при движении погрузчика с одинарными или составными колесами. Площадь контакта одинарного колеса можно примерно определить, разделив нагрузку на давление в шинах.

Принятое давление является неодинаковым для различных типов колес; давление в пневматических шинах с неметаллическим кордом лежит в пределах 0,6–0,7 МПа, а при наличии металлического корда – 0,6–0,8 МПа. Площадь контакта с поверхностью перекрытия стандартных литых резиновых колес и колес с ободом определяется внутренним давлением от 1,2 до 1,7 МПа. В случае полиуретановых колес давления могут превышать 7 МПа.

Сдвоенные (спаренные) колеса имеют большую площадь контакта, чем два отдельных колеса. Для определения данной полезной площади контакта существуют специальные таблицы и расчетные формулы.

Предварительную оценку данной площади контакта можно дать на основании анализа площади контакта двух колес и площади между зоной этого контакта. Если точно не известно, будут ли применяться транспортные средства со сдвоенными колесами, то в этих случаях необходимо руководствоваться значениями нагрузок на соответствующее количество одинарных колес.

Движущееся транспортное средство приводит к появлению эффекта усталости материала плиты. Усталостные напряжения, возникающие в бетоне, учитываются при определении предельного изгибающего момента конструкции плиты пола введением соответствующего коэффициента усталости  $K_u$ , определяемого по формуле:

$$K_u = 2 - \frac{\lg u}{6} \quad (23)$$

где:

$u$  – число приложений нагрузки:

$$u = n_a \cdot N \cdot T \cdot T_1 \quad (24)$$



$n_a$  – количество осей транспортного средства;

$N$  – количество проездов по одному в сутки;

$T$  – количество рабочих дней в году;

$T_{пр}$  – проектный срок эксплуатации полов.

Движущееся транспортное средство приводит к появлению эффекта усталости материала плиты. Усталостная прочность выражается в процентах от статической прочности на растяжение материала плиты для заданного количества циклов нагрузок. Стержневая и фибровая арматура значительно снижают усталостные напряжения. Особенно эффективным при этом является фибровое армирование с сочетанием низко- и высокомодульных волокон. По мере снижения отношения фактического напряжения при изгибе к его расчетному сопротивлению, увеличивается количество циклов нагрузки, которое может выдержать плита. По данным Ассоциации португальского цемента (Скоки, штат Иллинойс, 1984), при коэффициенте напряжения менее 0,45 бетон плиты может подвергаться неограниченному циклу нагружений. В таблице 1 показано количество циклов нагрузки при различных коэффициентах напряжения для неармированного бетона.

**Автор:**

**Горб Александр Михайлович**  
**ЗАО «СК Конкрет Инжиниринг».**

**Директор.**

**Советник РАЕ,**

**член международного**  
**союза экспертов**  
**по строительным**

**материалам, системам**  
**и конструкциям RILEM,**

**Американского института**  
**бетона ACI**

**и Британской ассоциации**  
**бетона CS.**