

# РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПОЛОВ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ

Определение внутренних усилий в плитах полов сводится к расчету плит, лежащих на многослойных грунтовых основаниях, при действии эксплуатационных нагрузок, приложенных к любому участку плиты. Плиты рассчитывают на действие статических нагрузок.

Динамическое воздействие нагрузок учитывают введением в расчет коэффициентов динамичности. Повторность приложения нагрузок, величина температурно-усадочных напряжений и нарастание прочности бетона во времени учитывается введением в расчет коэффициента условия работы.

Расчетные изгибающие моменты определяются в различных сечениях плиты с учетом задач строительной механики для плит, лежащих на упругом основании.

Определение внутренних усилий в плитах сводится к нахождению функции эпюр реактивного отпора (реакции) основания от заданной нагрузки. При этом обычно принимают, что осадка поверхности основания в точности совпадает с прогибами плиты под нагрузкой.

Конструкции промышленных бетонных полов с точки зрения теории упругости представляют собой плиту неограниченных размеров, лежащую на упругом основании и разделенную различными типами швов на прямоугольные участки (плиты). С целью упрощения расчетов определение действующих усилий и перемещений сводится к решению задачи изгиба тонких прямоугольных плит в декартовых координатах для краевых участков и в полярных координатах – для центральных полей плиты. В последнем случае рассматривается задача об изгибе гибкой круглой плиты неограниченного радиуса при действии сосредоточенной нагрузки, распределенной по малой площади, достаточно удаленной от краев и углов плиты. Для нагрузок, расположенных вблизи краевых и угловых участков плиты, рассматривают решения для полу- и четвертьбесконечных прямоугольных плит.

## Решение для прямоугольных плит, лежащих на упругом основании

Для прямоугольных плит условие изгиба нейтральной оси плиты выражается дифференциальным уравнением изгиба средней плоскости плит:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + p(x, y) = q(x, y) \quad (1)$$

где:  $D = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость плиты;

$E_0, \mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона плиты;

$h$  – толщина плиты;

$w$  – прогиб плиты;

$x, y$  – координаты срединной плоскости плиты;

$p(x, y)$  – реактивный отпор упругого основания;

$q(x, y)$  – внешняя нагрузка.

В зависимости от положенной в основу расчета гипотезы о работе грунта в основании вид функции  $p(x, y)$  может быть различным.

Действующий расчетный изгибающий момент в рассматриваемом сечении плиты определяется с учетом решений задач строительной механики для гибких прямоугольных плит, лежащих на упругом основании. Методология расчета таких плит при заданных граничных условиях наиболее полно рассмотрена Б. Г. Галеркиным.

Вопросу расчета плит на упругом основании в разное время посвящены работы А. П. Синицына, Б. Г. Коренева, В. А. Киселева, М. И. Горбунова-Посадова, И. А. Медникова, Л. И. Манвелова и В. И. Травуша. На основе модели коэффициента постели Л. И. Манвелова и Э. С. Бартошевичем получено решение для прямоугольной плиты при нагрузке, приложенной к любому участку в пределах ее контура, интегрированием дифференциального уравнения изгиба плиты (1) при соответствующих граничных условиях.

Дифференциальное уравнение изгиба прямоугольной плиты со сторонами  $a$  и  $b$  (рис. 1) имеет вид:

$$\nabla^4 w + \frac{4}{S^4} w = p(x, y) \quad (2)$$

где  $\nabla^4$  – бигармонический оператор;  $w$  – прогиб плиты;

$S = \sqrt[4]{\frac{4D}{c}} = 1,41l$ ;  $l = \sqrt[4]{\frac{D}{c}}$  – упругая ха-

рактеристика плиты;

$c$  – коэффициент постели.

Граничные условия для плит со свободными краями будут иметь вид:

$$x = 0; \quad M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

$$x = a; \quad Q_x = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$



**Горб Александр Михайлович**  
**ЗАО «СК Конкрит Инжиниринг».**  
**Директор.**

Соответственно, по краям плиты:  $y = 0$  и  $y = b$ ;  $M_y = Q_x = 0$ .

Для решения уравнения (2) с граничными условиями (3) применим метод разложения по собственным функциям; при этом собственные значения однородного дифференциального уравнения и собственные функции определяем вариационным методом. Следовательно, вместо уравнения (2) рассмотрим однородное уравнение:

$$\nabla^4 w + \frac{4}{S^4} w - \lambda w = 0 \quad (4)$$

Для определения собственных значений  $\lambda$  и собственных функций  $w$ , удовлетворяющих условию (4) и граничным условиям (3), рассмотрим функционал:

$$y(w) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ (\nabla^2 w)^2 + \left( \frac{4}{S^4} - \lambda \right) w^2 + 2(1 - \mu) \times \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (5)$$

Вариация этого функционала имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = & \int_0^a \int_0^b \left[ \nabla^4 w + \frac{4}{S^4} w - \lambda w \right] \eta dx dy - \\ & - \int_0^b \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \eta \Big|_0^a dy - \\ & - \int_0^a \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \eta \Big|_0^b dx + \\ & + \int_0^b \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_0^a dy + \\ & + \int_0^a \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_0^b dx = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Из равенства (6) видно, что вариация функционала (5) удовлетворяет как

дифференциальному уравнению (4), так и заданным граничным условиям (3).

Функцию  $w$  задаем в виде двойного ряда тригонометрических функций:

$$w = \sum_m \sum_n \left( d_{\min} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + b_{\min} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + c_{\min} \times \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + d_{\min} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (7)$$

Далее выражаем функционал (5) через заданную функцию (7), вычисляем все значения:

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial c} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial d} = 0 \quad (8)$$

В результате получаем системы линейных алгебраических уравнений, в результате решения которых определяем собственные значения и собственные функции  $w_i$ . Приложенную к плите нагрузку интенсивностью  $q$ , равномерно распределенную по некоторой площадке, раскладываем в ряд по собственным функциям и определяем все коэффициенты разложения нагрузки  $q_i$ . После этого решение диффе-

ренциального уравнения (2) с граничными условиями (3) имеет вид:

$$w = \sum \frac{q_i}{\lambda_i} w_i \quad (9)$$

Действующие изгибающие моменты определяются по известным формулам теории изгиба плит соответствующим дифференцированием выражения (9).

**Изгиб круглой пластинки, нагруженной сосредоточенной силой, равномерно распределенной по кругу и квадрату малой площади для случая симметричной нагрузки**

Для случая симметричного нагружения плиты относительно расчетного центра, к которому относятся полы производственных зданий, являющиеся бесконечной гибкой плитой (пластиной) на упругом основании, необходимо рассматривать вместо решения уравнения (1) в частных производных для прямоугольных плит решение для бесконечной круглой плиты с осевой симметрией. В этом случае прогибы плиты зависят только от одного переменного – расстояния от центра симметрии (как правило, расчетного центра нагрузок) до рассматриваемого сечения, т. е. появляется возможность решения данного уравнения более простым способом (в полярных координатах). Решение этого уравнения в данном случае упрощается: вместо

достаточно сложного для практического решения задач уравнения (1) с частными производными решается обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями:

$$D \left( \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = q(r) - kw \quad (10)$$

В частном случае пластинки, нагруженной в центре силой  $P$ , интенсивность  $q$  обращается в нуль по всей площади пластинки за исключением центра.

Введя обозначение:

$$\frac{k}{D} = \frac{1}{l^4} \quad (11)$$

приведем уравнение (10) к следующему виду:

$$l^4 \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right) + \varpi = 0 \quad (12)$$

где:  $l$  – упругая характеристика плиты.

Для упрощения дальнейших выкладок удобно ввести безразмерные величины, воспользовавшись следующими обозначениями:

$$\frac{\varpi}{l} = z, \quad \frac{r}{l} = x \quad (13)$$

Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right) + z = 0 \quad (14)$$

Применив символ  $\Delta$  вместо

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}$$

напишем это уравнение таким образом:

$$\Delta \Delta z + z = 0 \quad (15)$$

Это – линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка, общее решение которого может быть представлено в следующем виде:

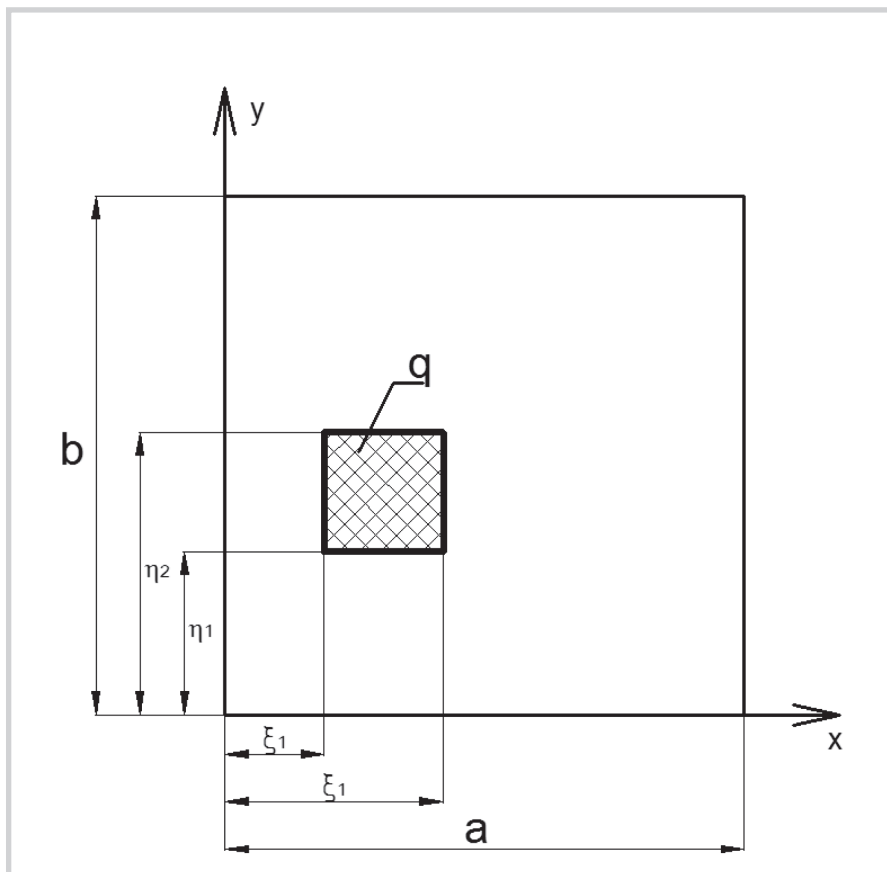


Рис. 1. Расчетная схема плиты

$$z = AX_1(x) + BX_2(x) + CX_3(x) + DX_4(x) \quad (16)$$

где  $A, \dots, D$  – постоянные интегрирования, а функции  $X_1, \dots, X_4$  представляют собой четыре независимых решения уравнения (15).

Попытаемся теперь найти решение уравнения (15) в виде степенного ряда. Пусть  $a_n x^n$  будет общий член этого ряда. Дифференцирование дает нам тогда:

$$\Delta(a_n x^n) = n(n-1)a_n x^{n-2} + na_n x^{n-2} = n^2 a_n x^{n-2}$$

и

$$\Delta\Delta(a_n x^n) = n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4}$$

Для выполнения условий уравнения (15) необходимо, чтобы каждому члену  $a_n x^n$  в ряде соответствовал такой член  $a_{n-4} x^{n-4}$ , для которого было бы справедливо соотношение:

$$n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4} + a_{n-4} x^{n-4} = 0 \quad (17)$$

При этом условии по подстановке ряда в уравнение (15) все его члены исчезают. Поэтому если этот ряд сходящийся, то он представляет собой частное решение уравнения (15). Из уравнения (17) следует, что:

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2} \quad (18)$$

Заметив также, что

$$\Delta\Delta(a_0) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta\Delta(a_2 x^2) = 0 \quad (19)$$

приходим к выводу, что имеются два ряда, удовлетворяющие уравнению (15), а именно:

$$\left. \begin{aligned} X_1(x) &= 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \\ X_2(x) &= x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \frac{x^{14}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Из обозначений (13) можно видеть, что при малых значениях расстояния  $r$ , т. е. для точек, близких к точке приложения нагрузки  $P$ , величина  $x$  мала и ряды (20) быстро сходятся.

Мы видим также, что последовательные производные рядов (20) сохраняют конечное значение в точке приложения нагрузки ( $x=0$ ). Это указывает на то, что одних этих рядов недостаточно для представления напряженного состояния в точке приложения нагрузки, где, как известно, изгибающие моменты становятся бесконечно большими.

По этим соображениям частное ре-

шение  $X_3$  уравнения (15) берется нами в следующем виде:

$$X_3 = X_1 \ln x + F_3(x) \quad (21)$$

где  $F_3(x)$  – функция  $x$ , которую точно так же можно представить степенным рядом. Дифференцируя по  $x$  уравнение (21), находим:

$$\Delta\Delta X_3 = \frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \ln x \Delta\Delta X_1 + \Delta\Delta F_3(x) + \ln x \Delta\Delta X_1 + \Delta\Delta F_3(x)$$

Подставляя же  $X_3$  вместо  $z$  в уравнение (15), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \ln x (\Delta\Delta X_1 + X_1) + \Delta\Delta F_3(x) + F_3(x) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку  $X_1$  удовлетворяет уравнению (15) и может быть представлена первым рядом (20), получаем для определения  $F_3(x)$  следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F_3(x) + F_3(x) &= -\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} = \\ &= -4 \left( -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot x^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Взяв  $F_3(x)$  в виде ряда:

$$F_3(x) = b_4 x^4 + b_8 x^8 + b_{12} x^{12} + \dots \quad (23)$$

и подставив этот ряд в уравнение (16), определим коэффициенты  $b_4, b_8, b_{12}, \dots$  так, чтобы наше уравнение удовлетворялось.

Заметив, что:

$$\Delta\Delta(b_4 x^4) = 4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4$$

и приравняв нулю сумму членов, не содержащих  $x$ , мы найдем, что

$$4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4 = 4 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2}$$

или:

$$b_4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^4 \cdot 4^4} = \frac{3}{128}$$

Приравнявая нулю сумму членов, содержащих  $x^4$ , находим:

$$b_8 = -\frac{25}{1769472}$$

Далее будем иметь:

$$b_n = (-1)^{\frac{n-1}{4}} \frac{1}{n^2(n-2)^2} \left[ b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots n^2} \right]$$

Таким образом, третье частное решение уравнения (15) будет иметь вид:

$$X_8 = X_1 \ln x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \dots \quad (24)$$

Подобным же способом мы найдем и четвертый частный интеграл  $X^4$  уравнения (15), положив:

$$\begin{aligned} X_4 &= X_2 \ln x + F_4(x) = \\ &= X_2 \ln x + 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} x^8 - \\ &\quad - \frac{1}{10^2 \cdot 8^2} \left( 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{4^2 \cdot 6^2 \dots 10^2} \right) x^{10} + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив частные решения (20), (24) и (25) в выражение (16), получим общее решение уравнения (15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} z &= A_1 \left( 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) + \\ &+ A_2 \left( x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) + \\ &+ A_3 \left[ \left( 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) \ln x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \dots \right] + \\ &+ A_4 \left[ \left( x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \ln x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{3456} x^6 - \frac{1054 \cdot 10^{-4}}{442368} x^{10} + \dots \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь остается лишь определить в каждом частном случае постоянные интегрирования  $A_1, \dots, A_4$  так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Рассмотрим случай, когда контур круглой пластинки конечного радиуса  $\alpha$  совершенно свободен (не оперт).

Используя для радиальных моментов выражение:

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right) = D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) \quad (27)$$

а для радиальных перерезывающих сил  $Q$  выражение:

$$\frac{d^3 \varpi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \varpi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\varpi}{dr} = \frac{Q}{D} \quad (28)$$

напишем граничные условия в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right)_{r=a} &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right)_{r=a} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

В дополнение к этим двум уравнениям мы имеем еще два условия, относящиеся к центру пластинки, а именно – что прогиб в центре пластинки должен иметь конечное значение, а сумма перерезывающих сил, распределенных по боковой поверхности бесконечно малого круглого цилиндра, вырезанного из пластинки в ее центре, должна уравновешивать сосредоточенную силу  $P$ . Первое из этих двух условий приводит нас к тому заключению, что постоянная  $A_3$  в общем решении (26) исчезает.

Второе условие дает:

$$\left( \int_0^{2\pi} Q_r r d\theta \right)_{r=a} + P = 0 \quad (30)$$

или, если воспользоваться обозначением (11),

$$-kl^4 \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right)_{r=\varepsilon} 2\pi\varepsilon + P = 0 \quad (31)$$

где  $\varepsilon$  – радиус бесконечно малого цилиндра. Подставив в это уравнение  $lz$  вместо  $\varpi$  и воспользовавшись для  $z$  выражением (26), найдем, что при бесконечно малом значении  $x$ , равном  $\varepsilon/l$ , это уравнение сводится к равенству:

$$-kl^4 \frac{4A_4}{l_e} \cdot 2\pi\varepsilon + P = 0$$

из которого следует, что:

$$A_4 = \frac{P}{8\pi kl^3} \quad (32)$$

Имея значения постоянных  $A_3$  и  $A_4$ , мы можем найти из соотношений (29) и обе остальные постоянные  $A_1$  и  $A_2$ . При заданных размерах пластинки и известных модулях пластинки и основания эти соотношения приводятся к двум линейным относительно  $A_1$  и  $A_2$  уравнениям.

### Использование бесселевских функций при решении задачи об изгибе круглой пластинки

Общее решение (16) уравнения (15) может быть представлено также через функции Бесселя. С этой целью введем в уравнение (15) новую переменную

$\xi = x\sqrt{i}$ ; таким путем придем к урав-

нению:

$$\Delta' \Delta' z - z = 0 \quad (33)$$

в котором:

$$\Delta' = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}$$

Уравнение (33) эквивалентно уравнению:

$$\Delta'(\Delta' z + z) - (\Delta' z + z) = 0 \quad (34)$$

а следовательно, также и уравнению:

$$\Delta'(\Delta' z - z) + (\Delta' z - z) = 0 \quad (35)$$

Отсюда следует заключить, что (33) удовлетворяется решениями дифференциального уравнения Бесселя:

$$\Delta' z + z = \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dz}{d\xi} + z = 0 \quad (36)$$

и решениями уравнения:

$$\Delta' z - z = \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dz}{d\xi} - z = 0 \quad (37)$$

преобразующегося в (36) при подстановке в него  $\xi_i$  вместо  $\xi$ . Поэтому совместное решение уравнений (36) и (37) можно записать в виде:

$$z = B_1 I_0(x\sqrt{i}) + B_2 I_0(xi\sqrt{i}) + B_3 K_0(x\sqrt{i}) + B_4 K_0(xi\sqrt{i}) \quad (38)$$

Здесь  $I_0$  и  $K_0$  – бесселевы функции соответственно первого и второго рода, от мнимого аргумента.  $B_1, B_2, \dots$  – произвольные постоянные. Поскольку аргумент  $x$  – вещественное число, все входящие в уравнение (38) функции имеют комплексный вид.

Для выделения вещественной части решения целесообразно ввести четыре новые функции, впервые использованные Кельвином и определяемые как:

$$\left. \begin{aligned} I_0(x\sqrt{\pm i}) &= \text{ber } x \pm \text{bei } x, \\ K_0(x\sqrt{\pm i}) &= \text{ker } x \pm \text{kei } x. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Полагая далее, что:

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= C_1 l, & B_1 - B_2 &= -C_2 il, \\ B_3 + B_4 &= C_4 l, & B_3 - B_4 &= -C_3 il, \end{aligned}$$

где новые переменные  $C_1, C_2, \dots$  – вещественные числа, получаем следующее выражение для прогибов пластинки:

$$\varpi = C_1 \text{ber } x + C_2 \text{bei } x + C_3 \text{ker } x + C_4 \text{kei } x \quad (40)$$

Все содержащиеся в нем функции табулированы и вещественны для вещественных значений аргумента. Для малых значений аргумента имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } x &= 1 - \frac{x^4}{64} + \dots, \\ \text{bei } x &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{2304} + \dots, \\ \text{ker } x &= -\ln x + \ln 2 - \gamma + \frac{\pi x^2}{16} + \dots, \\ \text{kei } x &= -\left(\frac{x^2}{4}\right) \ln x - \frac{\pi}{4} + (1 + \ln 2 - \gamma) \frac{x^2}{4} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где:  $\gamma = 0,5772157\dots$  – постоянная Эйлера,  $\ln 2 - \gamma = 0,11593\dots$

При больших значениях аргумента пользуются следующими асимптотическими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } x &\sim \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{bei } x &\sim \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \sin\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{ker } x &\sim \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2x}} \cos\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{kei } x &\sim -\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2x}} \sin\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где:  $\sigma = \frac{x}{\sqrt{2}}$

Общее решение (40) можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба круглой пластинки при опирании ее на упругое основание. Четыре постоянные  $C_1 \dots C_4$ , соответствующие в наиболее общем случае четырем граничным условиям, определяются в каждом частном случае.

Ограничимся случаем бесконечно большой пластинки, несущей сосредоточенную нагрузку  $P$  в точке  $x = 0$ . Из четырех функций, составляющих решение (40), первые две функции неограниченно возрастают с увеличением аргумента в соответствии с уравнениями (42); функция же  $\text{ker } x$  принимает бесконечно большое значение в начале, как это мы можем заключить из уравнений (41). Положив поэтому  $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ , приводим решение (40) к виду:

$$\varpi = C_3 \text{kei } x \quad (43)$$



Для определения постоянной  $C_3$  вычислим из уравнений (41) перерезывающую силу:

$$Q_r = -\frac{D}{l^3} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 \varpi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varpi}{dx} \right) = \frac{C_3 D}{l^3} \left( \frac{1}{x} - \frac{\pi x}{8} + \dots \right) \quad (44)$$

С уменьшением  $x$  величина  $Q_r$  стремится к  $C_3 D / l^3 x = C_3 D / l^2 r$ . С другой стороны, при равномерном распределении нагрузки  $P$  по окружности радиуса  $r$  имеем  $Q_r = -P / 2\pi r$ . Приравнявая оба эти полученные для  $Q_r$  выражения, находим:

$$C_3 = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \quad (45)$$

Подстановка  $C_3$  в уравнение (43) дает полное решение задачи Герца в виде:

$$\varpi = -\frac{Pl^2}{2\pi D} kei x \quad (46)$$

и соответствующая реакция основания определяется как:

$$p = k\varpi = \frac{\varpi D}{l^4} \quad (47)$$

В начале координат  $kei \cdot x = -\pi/4$ , и прогиб под нагрузкой достигает максимального значения:

$$\varpi_{\max} = \frac{Pl^2}{8D} \quad (48)$$

Для реакции основания в той же точке находим:

$$p_{\max} = \frac{P}{8l^2} \quad (49)$$

Положительные моменты, бесконечно большие в начале координат (в точке приложения силы), уже на небольшом расстоянии от точки приложения нагрузки легко поддаются вычислению с помощью функции  $kei x$ , взятой в форме (41). Введя значения прогиба из (46) в формулы (27) и (28), приходим к результатам:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \left( \ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) - \frac{1}{2}(1-\nu) \right], \\ M_t &= \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \left( \ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Сопоставление только что полученных выражений с уравнениями для радиальных и тангенциальных моментов для концентрированно нагруженной пластины убеждает в том, что напряженное состояние пластинки близ точки приложения нагрузки как в теории Герца, так и для свободно опертой круглой пластинки радиуса  $a=2le^{-\nu}=1,123l$ , тождественно, если

$$\text{исключить момент } M'_r = M'_t = -\frac{P}{8\pi}(1-\nu),$$

который следует наложить на моменты для круглой пластинки.

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка  $P$  распределена по площади круга радиуса  $c$ , малого радиуса в сравнении с упругой характеристикой плиты ( $l$ ).

Изгибающие моменты в центре круглой пластинки, несущей такую нагрузку, равны:

$$M_r = M_t = \frac{p}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln \frac{a}{c} + 1 \right] \quad (51)$$

Введя в уравнение (51) подстановку  $a=2le^{-\nu}$  и добавив момент  $M=-P/8 \cdot (1-\nu)$ , найдем для центра нагруженного круга бесконечно большой круглой пластины изгибающие моменты:

$$M_{\max} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left( \ln \frac{2l}{c} - \gamma + \frac{1}{2} \right) \quad (52)$$

или

$$M_{\max} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left( \ln \frac{l}{c} + 0,616 \right) \quad (53)$$

В случае высокой концентрации нагрузки значения напряжений при вычислении их из уравнения (53) подлежат исправлению средствами теории толстых пластин.

При равномерном распределении нагрузки по площади малого квадрата мы можем поступить следующим образом. Эквивалентом квадратной площади, например, является круг радиусом  $c=0,57u$ , где  $u$  – длина стороны квадрата. Подставив это в уравнение (53), получим:

$$M_{\max} = \frac{1+\nu}{4\pi} P \left( \ln \frac{l}{u} + 1,177 \right) \quad (54)$$

Влияние любой произвольной группы сосредоточенных нагрузок на прогибы неограниченной пластинки мож-

но определить, суммируя прогибы, производимые каждой нагрузкой в отдельности.

### Решение для случаев краевых нагрузжений плит

В расчетах Л. И. Манвелова и Э. С. Бартошевича помимо плит со свободными краями рассмотрены также следующие граничные условия: с двух сторон плиты – свободные края, с двух противоположных сторон – шарнирные соединения; шарнирные соединения со всех сторон плиты. Б. Г. Корнев рассмотрел случаи работы плит вблизи швов для изолированной и неизолированной конструкций, используя метод компенсирующих нагрузок.

В расчетах трение в сквозных швах (на свободных краях) не учитывается. При выводе формул использованы многочисленные экспериментальные данные. Учитывая трудности учета действительной податливости разного рода соединений плит (штыри, шпунт), вызванные наличием зазора и люфтов, расчетная величина моментов или прогибов для всех типов соединений принимается одинаковой.

Формулы прогиба и изгибающих моментов позволяют рассчитывать плиты при нагрузке, приложенной к любому участку. Однако математическая сложность задачи не дает возможности получить простые для практического применения формулы.

С целью облегчения разработанного метода было проведено большое количество числовых расчетов плит при нагрузке, приложенной к различным их участкам, на основе которых получены коэффициенты, представляющие собой отношения расчетных изгибающих моментов в различных точках плиты к максимальному изгибающему моменту в ее центре.

Это позволило определить внутреннее усиление в плитах следующим образом: вначале плиту рассчитывают на нагрузку, приложенную к центру плиты (на определенном расстоянии от края), то есть на так называемую нагрузку простого вида, равномерно распределенную по следу, центр тяжести которой совпадает с рассматриваемым сечением (расчетным центром). При этом определяются изгибающие моменты, возникающие в рассматриваемой точке (расчетном центре).

В случае действия нескольких нагрузок, приложенных вблизи расчетного центра, рассматривается нагрузка так называемого сложного вида, и расчет производят на действие каждой из нагрузок, приложенных в центре тяжести элементарной площадки в отдельности, с последующим суммированием полученных усилий в расчетном центре, руководствуясь принципом Сен-Венана – независимости действия сил.

За расчетный центр принимают наиболее нагруженный или невыгодно расположенный след, исходя из усло-

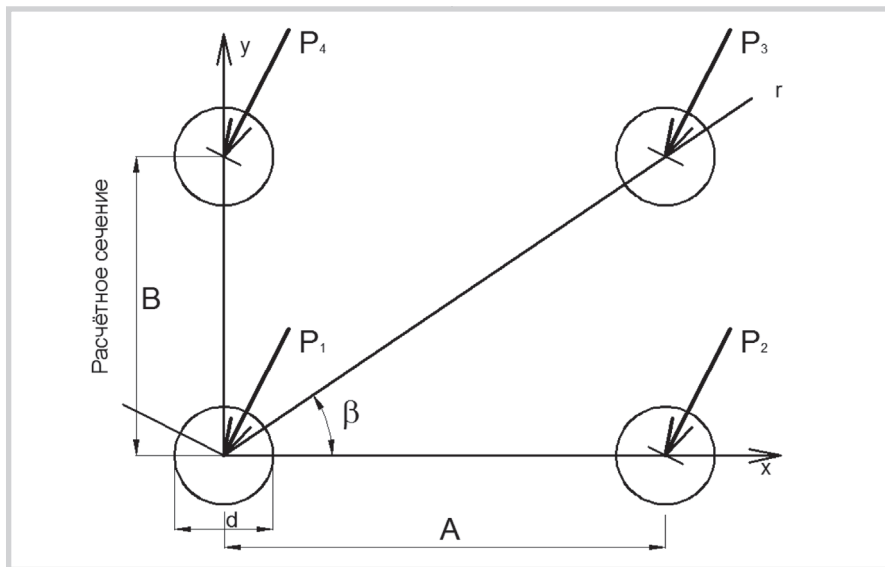


Рис. 2. Схема расположения нагрузок

вия получения наибольшего значения изгибающего момента (рис. 2).

Достаточно большие размеры плит, применяемые в практике строительства полов, дают возможность рассчитывать их на центрально приложенную нагрузку, как плиты неограниченных размеров.

После того как определены изгибающие моменты от нагрузки, приложенной в центре, определяются расчетные изгибающие моменты при самых невыгодных случаях приложения нагрузки к различным участкам плиты. Это достигается умножением значения максимального момента от центрально-приложенной нагрузки на соответствующие переходные коэффициенты  $k$ , представляющие собой отношения расчетных изгибающих моментов в рассматриваемых сечениях к максимальному изгибающему моменту в центре плиты.

При этом рассматриваются следующие зоны (участки) плиты:

**Зона 1.** Центральная зона плиты при действии нагрузки на внутреннюю область плиты. Расстояние от нагрузки до края плиты (или оси шва) более  $1,2L$ , где  $L$  – упругая характеристика плиты:

$$L = \sqrt[4]{\frac{B}{K_s}} \quad (55)$$

**Зона 2.** Зона плиты вблизи швов со стыковыми (штыревыми или шпунтованными) соединениями, или швов с параметрами армирования, равными параметрам штыревого соединения (армирование плит стержневой арматурой, пересекающей швы) при действии нагрузки на расстоянии от края менее  $1,2L$ .

**Зона 3.** Зона плиты вблизи так называемых ложных швов, устраиваемых

без стыковых соединений, при действии нагрузки на расстоянии от оси шва менее  $1,2L$ .

**Зона 4.** Свободный край плиты. Расстояние от нагрузки до края плиты менее  $1,2L$ .

**Зона 5.** Свободный угол плиты. Расстояние от нагрузки до двух краев плиты, образующих угол со стороной, менее  $1,6L$ .

На основании выполненных теоретических и экспериментальных исследований установлены следующие переходные коэффициенты « $k$ » от изгибающего момента при центральном нагружении к максимальным моментам при нагружении плиты в различных зонах:

– для положительных изгибающих моментов:

- $k = 1,2$  для зоны «2»;
- $k = 1,3$  для зоны «3»;
- $k = 1,5$  для зоны «4»;

– для отрицательных изгибающих моментов:

- $k = 0,45$  для зоны «1»;
- $k = 0,75$  для зоны «2»;
- $k = 0,82$  для зоны «3»;
- $k = 0,95$  для зоны «4»;
- $k = 2,7$  для зоны «5».

Для расчета бетонных или сталефибробетонных конструкций полов достаточным будет рассмотрение действия только положительных моментов для зон «1», «2», «3» и отрицательного момента для зоны «5». Ввиду того, что, как правило, нагрузки располагаются на некотором удалении от краев плиты (стен здания), практически для расчета большинства типов полов необходимо учитывать только зоны «1», «2», «3».

Основное достоинство рассмотренного метода заключается в простой в математическом отношении возможности определения усилий при расположении нагрузок в определенных крити-

ческих расчетных сечениях плиты – в углу и на краевых участках. **Участки плиты, расположенные в промежуточных зонах, в большинстве случаев не представляют интереса с практической точки зрения.**

Ниже приведены формулы для расчета однослойных плит полов при использовании модели коэффициента постели.

Расчетные значения изгибающих моментов определяются по формуле:

$$M_d = k \cdot k_N \cdot M_{c,max} \quad (56)$$

$k$  – переходной коэффициент от изгибающего момента при центральном нагружении плиты к моменту при краевых и угловых нагружениях плиты;

$k_N$  – коэффициент, учитывающий накопление остаточных прогибов в основании;

$M_{c,max}$  – расчетный изгибающий момент в центре плиты пола, определяемый как сумма моментов от отдельных нагрузок по формуле:

$$M_{c,max} = M_0 + \sum M_i \quad (57)$$

$M_0$  – изгибающий момент в расчетном центре от нагрузки простого вида, равномерно распределенной по следу, центр тяжести которого совпадает с расчетным центром, и определяемый по формуле:

$$M_0 = P \cdot f(a) \quad (58)$$

$P_p$  – расчетная нагрузка на след, центр которого совпадает с расчетным центром:

$$P_p = P_0 \cdot \gamma_{f(d)} \quad (59)$$

$P_0$  – нормативная нагрузка на след;

$\gamma_f$  – коэффициент перегрузки при действии статической нагрузки;

$\gamma_{f(d)}$  – коэффициент динамичности при действии динамической нагрузки;

$f(a)$  – функция, значения которой принимают в зависимости от соотношения сторон прямоугольного следа ( $a$ ,  $b$ ) или приведенного радиуса ( $R$ ):

$$f(a) = F [R, (a, b)] / L \quad (60)$$

Значение функции  $f(a)$  определено исходя из решения Б. Г. Коренева для изгибающего момента в центре плиты на упругом основании, отвечающего гипотезе коэффициента постели:

$$M_y = P \cdot L \cdot (0,096 \cdot \sqrt{F} - 0,012 \cdot L) / F \quad (61)$$

где:

L – упругая характеристика плиты;  
F – площадь следа нагрузки.

Отсюда значение функции  $f(\alpha)$  при заданном уровне надежности определяем по формуле:

$$f(\alpha) = k_p \cdot L \cdot (0,096 \cdot \sqrt{F} - 0,012 \cdot L) / F \quad (62)$$

где:

$k_p$  – статистический коэффициент условий работы, принимаемый в зависимости от задаваемого уровня надежности от 0,5 до 1,3. Для любых случаев уровень надежности изменяется от 0,5 до 1 и зависит от следующих факторов:

- толщины плиты;
- коэффициента вариации толщины плиты;
- амплитуды колебаний температуры на поверхности плиты;
- коэффициента вариации температуры на поверхности плиты;
- коэффициента вариации интенсивности нагрузок;
- коэффициента вариации числа приложенных нагрузок;
- коэффициента вариации прочности и модуля упругости бетона;
- коэффициента вариации коэффициента постели.

Для плит полов, для которых характерны стандартные границы толщины (от 0,15 м до 0,25 м), постоянство положительной температуры на поверхности при эксплуатации, предсказуемость значения и интенсивности эксплуатационных нагрузок, а также (как правило) наличие стабильного подстилающего слоя основания и низкие значения коэффициентов вариации по используемым материалам, коэффициент условий работы варьируется от 0,5 до 0,6.

Значения функции  $f(\alpha)$  табулированы в нормативной и справочной литературе для нагрузки, равномерно распределенной по кругу или прямоугольному следу.

С учетом заданного, характерного для полов коэффициента условий работы функцию  $f(\alpha)$  для большинства случаев можно определить, представив ее в виде полинома. Для нагрузки равномерно распределенной по кругу в виде полинома 4-й степени:

$$f(\alpha) = A \cdot X^4 - B \cdot X^3 + C \cdot X^2 - D \cdot X + E \quad (63)$$

$X = R/L$  – переменный коэффициент полинома;

R – радиус равновеликого отпечатка;

A, B, C, D – постоянные полинома:

$$A = 0,3917; B = 6,682; C = 42,901; D = 144,98.$$

Для нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольному следу со сторонами  $a_r$  и  $b_r$ ,  $f(\alpha)$  представляется в виде полинома 3-й степени:

$$f(\alpha) = (-A) \cdot \alpha^3 + B \cdot \alpha^2 - C \cdot \alpha + D \quad (64)$$

где:  $\alpha$ ,  $\beta$ , A, B, C, D – переменные коэффициента полинома;

$\alpha = a_r/L$ ;

$\beta = b_r/L$ ;

$A = (-A1) \cdot \beta^3 + B1 \cdot \beta^2 - C1 \cdot \beta + D1$

$B = A2 \cdot \beta^3 + B2 \cdot \beta^2 - C2 \cdot \beta + D2$

$C = A3 \cdot \beta^3 + B3 \cdot \beta^2 - C3 \cdot \beta + D3$

$D = (-A4) \cdot \beta^4 + B4 \cdot \beta^3 + C4 \cdot \beta^2 - D4 \cdot \beta + E$

$$A1 = 0,0003; B1 = 0,0111; C1 = 0,1328; D1 = 0,5399;$$

$$A2 = 0,00004; B2 = 0,0596; C2 = 1,2827; D2 = 6,7586;$$

$$A3 = 0,0182; B3 = 0,0155; C3 = 6,2658; D3 = 42,138;$$

$$A4 = 0,001; B4 = 0,0269; C4 = 0,9914; D4 = 25,685; E = 141,72;$$

$A(n) - D(n)$ , E – постоянные полинома.

$M_i$  – изгибающий момент в расчетном центре от сосредоточенной нагрузки  $P_i$ , приложенной в центре тяжести элементарной площадки, расположенной за пределами расчетного центра, определяемый по формуле:

$$M_i = K_4 \cdot P_i \quad (65)$$

$K_4$  – табулированный коэффициент, принимаемый в зависимости от отношения  $X_i/L$  и  $Y_i/L$ , где  $X_i$  и  $Y_i$  – координаты точек приложения нагрузок  $P_i$ , определяемые по схеме расположения нагрузок;

L – упругая характеристика плиты (55);

b – расчетная ширина сечения плиты, принимаемая равной 1 м;

$K_s$  – эквивалентный коэффициент постели подстилающего основания;

$P_i$  – нагрузка, приходящаяся на каждую элементарную площадку, расположенную вне расчетного центра, заменяемая эквивалентной сосредоточенной нагрузкой с точкой приложения в центре тяжести элементарной площадки;

B – жесткость сечения плиты; для бетонного и фибробетонного сечения величина «B» определяется по формуле:

$$B = (E \cdot h^3) / (12 \cdot (1 - \mu^2)) \quad (66)$$

E – модуль упругости бетона;

h – высота сечения плиты;

$\mu$  – коэффициент Пуассона материала плиты (для бетона  $\mu=0,2$ ).

Предельный изгибающий момент  $m_u$  для бетонных (неармированных) конструкций полов определяется (с учетом упруго-пластичного момента сопротивления) по формуле:

$$m_u = \gamma_c \cdot R_{bt} \cdot \frac{h^2}{3,5} \quad (67)$$

$\gamma_c$  – коэффициент условий работы;  
 $R_{bt}$  – расчетное сопротивление бетона осевому растяжению.

В современной проектной практике применяются различные по типу армирования конструкции полов, расчет которых отличается как при определении действующих усилий (изгибающих моментов), так и при расчете несущей способности по первому или второму предельному состоянию, в зависимости от характера армирования конструкции плиты пола.

При расчете действующих изгибающих моментов определяющим фактором является учет жесткости рассматриваемого сечения плиты. Жесткость конструкции, лежащей на упругом основании, существенным образом определяет действительный характер ее работы.

По существу характер изгибающих моментов и их величина зависят главным образом от соотношений жесткости изгибаемой конструкции и основания. Уменьшение при расчете конструкции показателя ее жесткости, или, говоря точнее, отказ от его необоснованного преувеличения приводит, как правило, к снижению вычисляемых усилий в конструкции, что ведет во многих случаях к заметной экономии.

При этом необходимо учитывать, что снижение жесткости плиты ведет к увеличению давлений на подстилающий грунт. Однако, учитывая относительную незначительность удельных давлений на грунт в случае промышленных полов, влиянием увеличенного давления можно пренебречь, т. к. деформация основания происходит по начальному линейному участку диаграммы «напряжение – деформация» при весьма малых удельных давлениях, соответствующих упругой стадии работы грунта.

**Автор:**  
**Горб Александр Михайлович**  
**ЗАО «СК Конкрет Инжиниринг».**  
**Директор.**  
**Советник РАЕ,**  
**член международного**  
**союза экспертов**  
**по строительным**  
**материалам, системам**  
**и конструкциям RILEM,**  
**Американского института**  
**бетона ACI**  
**и Британской ассоциации**  
**бетона CS.**